
La matematica nella Cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze

Giuseppe Conti

Dipartimento di Matematica DIMAI Università di Firenze



Figura 1: La Cupola della chiesa di S. Maria del Fiore a Firenze.

In questo articolo sono trattati alcuni aspetti riguardanti la geometria e la genesi architettonica della Cupola della Cattedrale di Santa Maria del Fiore a Firenze, costruita da Filippo Brunel-

leschi. Infatti, nella Cupola del Brunelleschi c'è molta matematica "nascosta", che serve, tra l'altro a spiegare numerosi aspetti di questa costruzione: in che modo fu possibile costruirla, la sua armonia e, in parte, la sua statica. Non deve meravigliare il fatto che la matematica sia uno strumento così importante per scoprire i "segreti" della Cupola. Gli antichi architetti conoscevano molto bene la matematica; in particolare, Brunelleschi era un ottimo matematico: le sue conoscenze matematiche gli permisero, fra le altre cose, di porre le basi geometriche della prospettiva.

La Cupola del Duomo di Santa Maria del Fiore di Firenze, innalzata dal Brunelleschi fra il 1420 ed il 1436, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] ha sempre colpito la fantasia dei visitatori e l'interesse degli studiosi; questo è dovuto sia alla sua bellezza, sia alla sua innovativa (e misteriosa) tecnica costruttiva, sia alle sue dimensioni: il suo diametro interno misura 45 metri, quello esterno 54 metri, la sua base si trova a 55 metri dal suolo; la Cupola raggiunge 91 metri e, con la Lanterna, che pesa circa 750 tonnellate, essa arriva a circa 116 metri; il

suo peso è di circa 29.000 tonnellate. Anzitutto, è interessante notare che le misure degli elementi che compongono la Cupola determinano delle proporzioni auree. Infatti, la Cupola inizia da un'altezza di 55 metri, poggia su un tamburo di 13 metri, è alta mediamente 34 metri ed è sormontata dalla Lanterna di 21 metri. Si possono riconoscere alcuni numeri della successione di Fibonacci, che, com'è noto, sono legati alla sezione aurea. Questo fatto è ben noto anche agli studiosi di musica; infatti, quando la Cupola fu consacrata nel 1436, il famoso musicista fiammingo G. Dufay compose per l'occasione il mottetto *Nuper rosarum flores*; questa composizione riproduceva, tra l'altro, i rapporti presenti nella Cupola di Santa Maria del Fiore, cioè proprio quelli legati alla sezione aurea.

Nella presente nota voglio evidenziare il ruolo che la matematica ha avuto nello studio di questo importante monumento. Non deve meravigliare il fatto che la matematica si sia rivelata uno strumento così notevole; infatti Brunelleschi era anche un matematico: egli fu il primo che dette le regole geometriche della prospettiva e, per questo motivo, è citato in tutti i più importanti testi di storia della matematica, come il Boyer, il Kline, il Loria [8, 9, 10]. Inoltre, egli era circondato da altri valenti matematici, come Paolo dal Pozzo Toscanelli e Giovanni dell'Abaco.

La Cupola è formata da otto *spicchi*, chiamati *vele*; ciascuna di queste è una porzione di cilindro ellittico. I costoloni di spigolo, che all'esterno sono ricoperti di marmo bianco, sono archi di circonferenza, mentre la sezione mediana di ciascuna vela è un arco di ellisse. Su questo fatto ci sono state numerose polemiche nel passato ed anche oggi vengono fatte affermazioni inesatte su tale questione [11].

Per studiare questo problema, insieme ai professori Giovanni Anzani e Roberto Corazzi, abbiamo estratto dal rilievo degli otto costoloni di spigolo, eseguito con il laser-scanner, le coordinate di circa 500 punti per ciascun costolone che, nel rilievo suddetto, si trovano in una fascia dello spessore di 4 mm. Successivamente abbiamo elaborato questi dati determinando la circonferenza dei minimi quadrati; in questo modo abbiamo ottenuto, per ciascun costolone, una circonferenza il cui raggio misura mediamente 36.18 metri, con uno scarto quadratico medio molto piccolo,

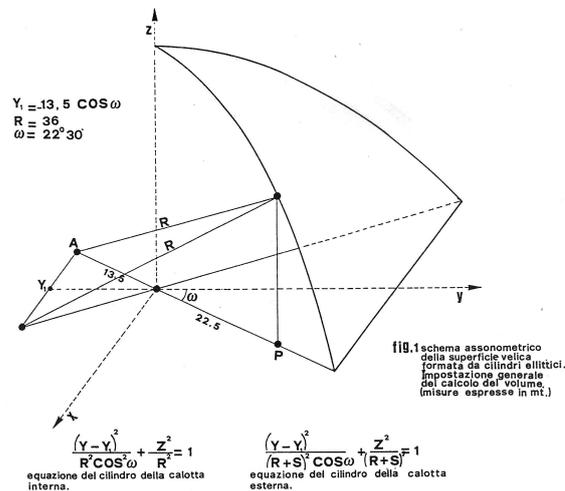


Figura 2: Cilindro ellittico delle vele e sua equazione.

dell'ordine di 1 cm. Tale risultato è molto interessante perché è quasi coincidente con la misura teorica di 36 metri che deve avere il raggio di ciascun costolone. Per quanto riguarda i profili mediani delle vele della Cupola, abbiamo considerato i punti che si ottengono intersecando una vela con il piano perpendicolare alla base e passante per l'asse della Cupola. La curva teorica deve essere necessariamente un'ellisse, per cui abbiamo cercato la conica dei minimi quadrati e non la circonferenza. La conica che abbiamo ottenuto con tale metodo è un'ellisse, in pieno accordo con le considerazioni teoriche, anche in questo caso con uno scarto quadratico medio molto piccolo.

Il profilo della Cupola interna è un sesto (che significa curvatura) di quinto acuto, mentre quella esterna è un sesto di quarto acuto. Il significato geometrico è il seguente. Il diametro della Cupola interna viene diviso in cinque parti uguali, mentre quello della esterna in quattro parti. Successivamente si punta il compasso nei due centri di quinto acuto, ciascuno dei quali si trova a 9 metri dall'estremità del diametro e si tracciano due archi di circonferenza con raggio pari a 36,00 metri. Puntando il compasso negli stessi punti, si tracciano gli archi di quarto acuto con raggio pari a 40,50 metri.

Come già aveva osservato Leonardo Ximenes [12] nel XVIII secolo, il profilo della Cupola si avvicina molto ad una catenaria (Huygens fu il primo ad usare il termine catenaria in una lettera a Leibniz nel 1690), la quale è la curva migliore

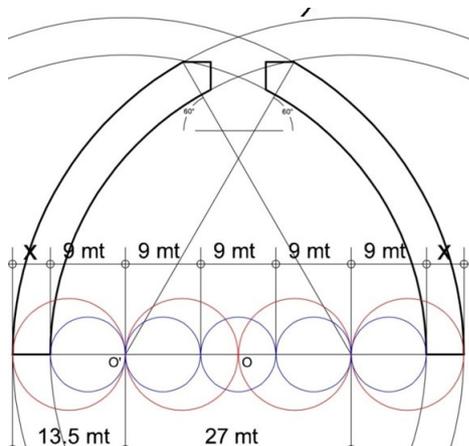


Figura 3: Costruzione del profilo della Cupola.

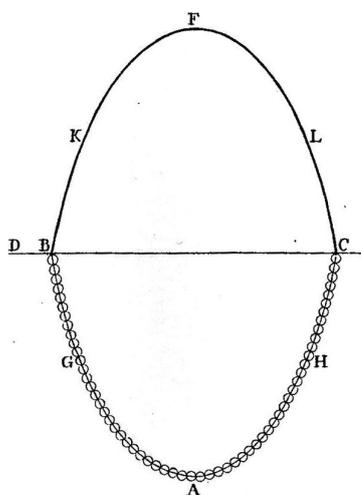


Figura 4: La curva catenaria.

per sostenere un arco soggetto solo al proprio peso, come dimostrato da Giovanni Bernoulli nel 1691.

Scrivono, infatti, lo Ximenes [12]: *Il Brunelleschi non sapeva certamente che, sarebbon venuti dopo di lui alcuni Geometri che avrebbon dimostrato che per dare ad un arco, ad una volta, ad una cupola quella curvità che facesse massima la sua resistenza, era necessario di dare a quell'arco l'andamento di una curva catenaria rovesciata. Eppure egli è certissimo, che il sesto della nostra cupola è tale che si accosta assai dappresso alla curva catenaria, curva assai acconcia alla costruzione delle cupole.* Abbiamo eseguito una verifica anche di questo fatto, come si può vedere dalla Figura 5.

Osserviamo che, in realtà, la Cupola di Santa Maria del Fiore è formata da due cupole: una interna, che è la struttura portante ed ha uno

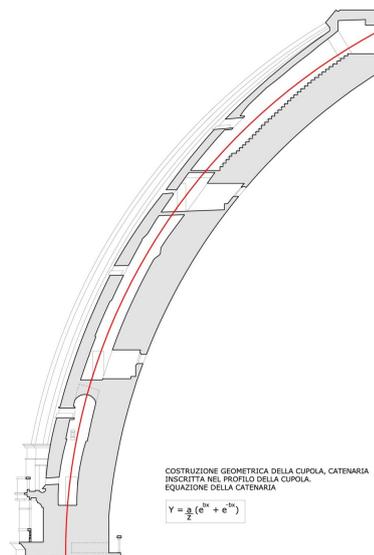


Figura 5: La curva catenaria della Cupola.

spessore di circa 2,4 metri, ed una esterna, più sottile (circa 0,9 metri), la quale, come disse il Brunelleschi, serve a proteggere la Cupola interna dalle intemperie e dagli sbalzi di temperatura ed a renderla *più magnifica e gonfiante*. Fra queste due cupole vi è uno spazio di circa 1,2 metri, attraverso il quale è possibile salire fino alla sua sommità, cioè alla base della lanterna.

Salendo sulla Cupola abbiamo, alla destra, la Cupola interna e, alla sinistra, quella esterna; possiamo così notare la particolare disposizione dei mattoni che la compongono: essi non sono messi, come ci si potrebbe aspettare, secondo linee orizzontali, cioè parallele al piano terra, ma alcuni sono disposti secondo linee curve (le cosiddette corde *blande* o *brande*), altri verticalmente (per coltello), formando la cosiddetta spina di pesce, altri sono disposti radialmente e convergono verso l'asse della Cupola.

Perché il Brunelleschi ha disposto i mattoni in questo modo particolare e quale regola ha seguito per fare ciò? Egli non ha lasciato niente di scritto sul modo con cui ha costruito la Cupola; infatti esistono due sue relazioni (1420 e 1426) in cui si dice quali sarebbero state le caratteristiche della Cupola, ma non la tecnica con la quale egli l'avrebbe costruita. Questo fu dovuto, molto probabilmente, ai rapporti molto contrastati che aveva con i fiorentini, i quali erano sempre polemicamente con lui e controllavano continuamente ciò

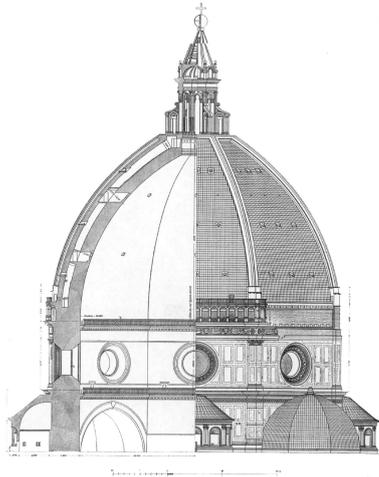


Figura 6: Spaccato della Cupola.

che faceva: esiste nell'Archivio di Stato di Firenze una pergamena scritta nel 1425/26, durante la costruzione della Cupola, in cui il pratese Giovanni di Gherardo da Prato accusa il Brunelleschi di commettere gravi errori nella sua costruzione.

La Cupola di Santa Maria del Fiore è a base ottagonale, a differenza di altre cupole di dimensioni analoghe che sono a base circolare (cupole di rotazione), come il Pantheon e la Cupola di San Pietro a Roma, la Cupola di Santa Sofia ad Istanbul. Brunelleschi sapeva che le cupole di rotazione sono più semplici da costruire, rispetto a quelle a base poligonale, ed hanno meno problemi dal punto di vista statico perché le forze si distribuiscono in maniera uniforme. Per questo motivo egli propose, con un raccordo murario, di rendere circolare la sua base; tuttavia, i fiorentini si opposero perché volevano che la Cupola del Duomo avesse la stessa forma ottagonale di quella (più piccola) del Battistero di San Giovanni. È interessante ricordare che quasi tutti i battisteri e le fonti battesimali hanno forma ottagonale per quello che affermò Sant'Ambrogio nel IV secolo: *Dio aveva creato il mondo in sei giorni e il settimo si riposò, ma l'opera non era completa per la presenza del peccato originale; l'ottavo giorno Gesù Cristo, con il Battesimo, tolse il peccato originale e completò l'opera del Padre.*

Per le cupole di rotazione la tecnica costruttiva è abbastanza semplice: basta, ad esempio, disporre i mattoni secondo anelli circolari sovrapposti (i paralleli), il cui diametro si restringe man mano che si sale verso la sommità. In questo

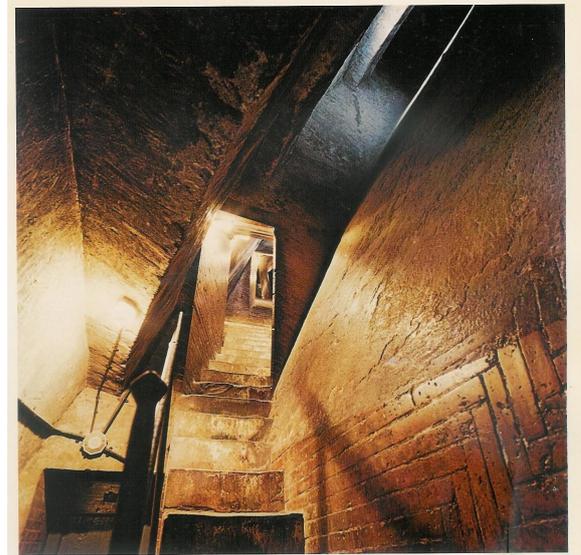


Figura 7: Il camminamento fra la Cupola interna (a destra) e quella esterna (a sinistra).

modo la struttura diventa autoportante, cioè si sostiene da sola durante la sua costruzione. Notiamo che i paralleli delle cupole di rotazione sono sempre perpendicolari alle linee meridiane, proprio come i meridiani ed i paralleli della superficie terrestre. Questa tecnica non è possibile in una struttura a base ottagonale a causa della discontinuità che si presenterebbe nei vertici dell'ottagono: infatti, in questo modo, i letti di posa dei mattoni, appartenenti a due vele adiacenti, formerebbero un angolo proprio nel punto in cui le tensioni sono maggiori [13].

L'idea di Brunelleschi è stata quella di partire disponendo con continuità i mattoni negli spigoli d'angolo, come se la Cupola fosse di rotazione (e, quindi, autoportante in fase costruttiva).

Per fare ciò, egli ha collocato i mattoni sempre perpendicolarmente alle linee meridiane (come nelle cupole di rotazione); in questo modo i mattoni si dispongono secondo quelle linee (dette *lossodromiche ortogonali*), che possiamo osservare sulla Cupola (le *corde blande*). In altre parole, le *corde blande* corrispondono ai paralleli delle cupole di rotazione: la differenza consiste nel fatto che in queste ultime essi sono, come dice il nome, paralleli al piano terra, mentre nella Cupola del Brunelleschi essi hanno l'andamento curvilineo che vediamo (Figure 10, 11).

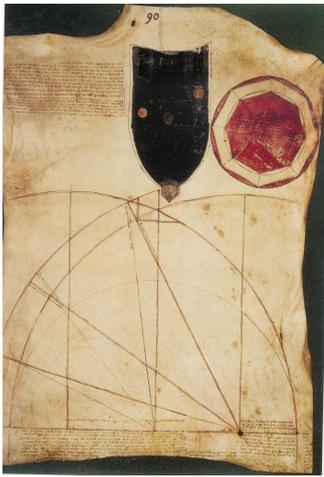


Figura 8: Pergamena di Giovanni di Gherardo da Prato

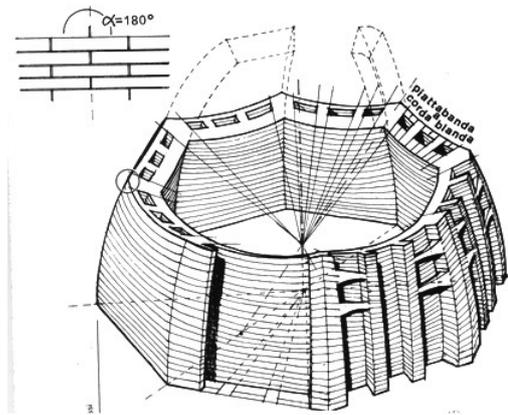


Figura 10: Disposizione dei mattoni nella Cupola di Santa Maria del Fiore.

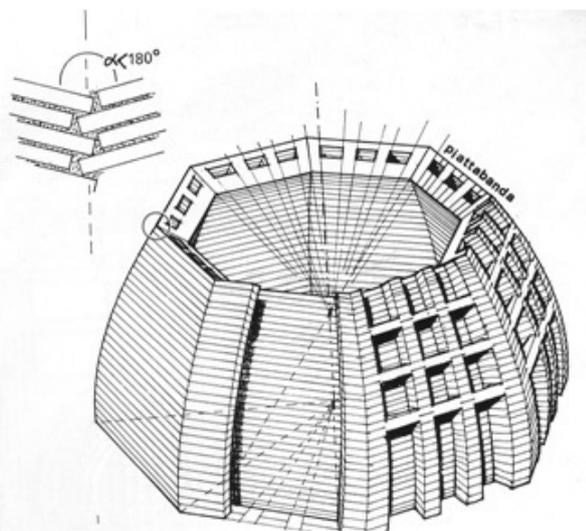


Figura 9: Cupola ad anelli ottagonali.

Sono state elaborate diverse teorie riguardanti la tecnica usata dal Brunelleschi per disporre i mattoni a corda blanda; alla fine quelle più accreditate erano due: quella delle curve losodromiche (principalmente, Ximenes, Chiarugi, Quilghini, Rossi) [12, 14, 15] e quella delle curve ottenute come intersezione fra il cilindro e un cono variabile (Di Pasquale e altri)[1]. Notiamo che i sostenitori di queste teorie erano in forte contrasto fra loro, ciascuno ritenendo che soltanto la propria teoria fosse quella giusta.

Io ho tradotto in formule matematiche le due ipotesi per vedere quali risultati si ottenevano; sono così giunto ad una conclusione estremamente interessante: queste due teorie, pur essendo formulate con parole e sfumature diverse tra loro,

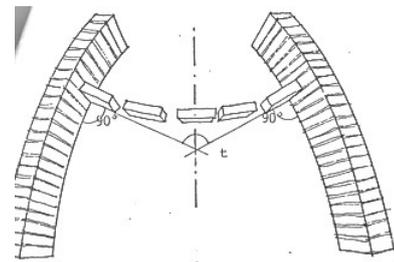


Figura 11: Mattoni disposti ortogonalmente alle linee meridiane.

tanto da renderle apparentemente differenti, danno lo stesso risultato e forniscono un andamento delle corde blande uguale a quello descritto in precedenza. Gli accurati rilievi eseguiti da me e dal Prof. Corazzi [2] hanno confermato che la Cupola reale coincide perfettamente con quella teorica ottenuta dalle suddette teorie; inoltre, in questo modo possiamo anche, come abbiamo fatto, provare che altre teorie sulla Cupola non hanno alcuna corrispondenza con l'oggetto reale.

Dunque la matematica permette di studiare a fondo le varie teorie, se riusciamo, naturalmente, a metterle in formule. Possiamo, così, sapere quale può essere l'oggetto che si otterrebbe dall'applicazione pratica di ciascuna ipotesi, senza essere obbligati a costruirlo.

Per quanto riguarda i mattoni disposti a spina di pesce, notiamo che questi si sistemano secondo delle curve assimilabili ad eliche cilindriche ellittiche.

I mattoni disposti a spina di pesce nella Cupola hanno la stessa funzione di quella delle cupole di rotazione: servono ad impedire lo scivolamento

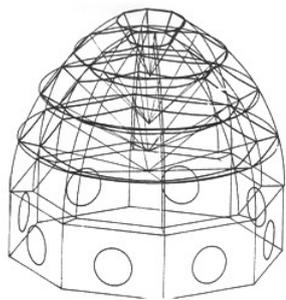


Figura 12: Corde blande ottenute come intersezione fra il cilindro e un cono variabile.

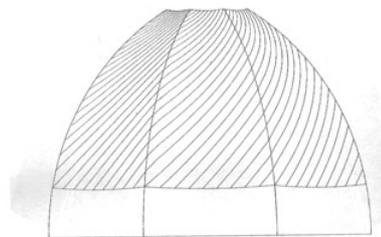


Figura 14: Mattoni disposti a spina di pesce nella Cupola del Brunelleschi.

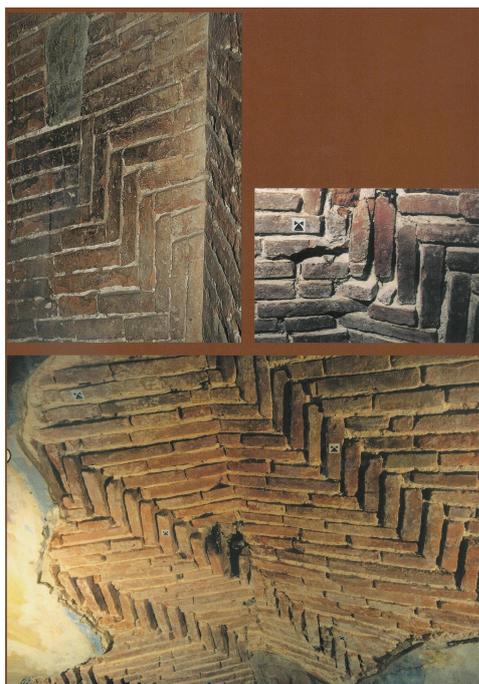


Figura 13: Mattoni disposti a spina di pesce nella Cupola del Brunelleschi.

dei mattoni disposti a corda blanda durante la costruzione.

Anche la scala che porta in cima alla Cupola segue una curva ad elica, ma gira nel verso opposto a quella della spina di pesce. Ancora una volta questo fatto non è casuale, poiché in questo modo la struttura risulta rinforzata, esattamente come accade nelle doppie eliche del DNA o delle rampe di accesso allo stadio di Firenze.

Infine, concludiamo osservando che la matematica serve anche a comprendere più a fondo la bellezza della Cupola. Infatti, come abbiamo già detto, le proporzioni fra le misure delle varie parti che la compongono sono riconducibili alla sezione aurea: esso è il rapporto più frequente,

essendo il più armonioso che si usa (dall'antichità ai giorni nostri) in architettura e nell'arte in generale.



- [1] S. DI PASQUALE: *La costruzione della cupola di Santa Maria del Fiore*. Biblioteca Marsilio, Venezia (2002).
- [2] R. CORAZZI, G. CONTI: *Il segreto della Cupola del Brunelleschi a Firenze*. Angelo Pontecorboli Editore, Firenze (2011).
- [3] G. CONTI, R. CORAZZI: *La Cupola di Santa Maria del Fiore raccontata dal suo progettista Filippo Brunelleschi*. Edizioni Sillabe, Livorno (2005).
- [4] L. BARTOLI: *Il disegno della cupola del Brunelleschi*. Olschki, Firenze (1994).
- [5] E. BATTISTI: *Filippo Brunelleschi*. Electa, Milano (1989).
- [6] F. GURRIERI, "La cupola", in F. Gurrieri, G. Belli, A. Benvenuti Papi, R. Dalla Negra, Fabbri P., Tesi V., *La cattedrale di Santa Maria del Fiore a Firenze*, Cassa di Risparmio di Firenze, I, Firenze (1994) 81-135.
- [7] H. SAALMAN: *Filippo Brunelleschi. The cupola of Santa Maria del Fiore*. A. Zwemmer, London (1980).
- [8] G. LORIA: *Storia delle Matematiche. Dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX*. Ulrico Hoepli Editore, Milano (1950).
- [9] C. B. BOYER: *Storia delle Matematiche*. Arnoldo Mondadori Editore, Milano (1980).
- [10] M. KLINE: *Storia del pensiero matematico. Volume primo. Dall'antichità al Settecento*. Giulio Einaudi Editore, Torino (1991).
- [11] W. FERRI, M. FONDELLI, P. FRANCHI, F. GRECO: "Il rilevamento fotogrammetrico della cupola di Santa Maria del Fiore", *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini dell' I.G.M.* XXX (1971) 158-184.
- [12] L. XIMENES: *Del vecchio e nuovo gnomone fiorentino e delle osservazioni astronomiche, fisiche e architettoniche*. Stamperia Imperiale, Firenze (1757).
- [13] P. SANPAOLES: *La Cupola di Santa Maria del Fiore. Il progetto. La costruzione*. Edam, Firenze (1977).

- [14] A. CHIARUGI, D. QUILGHINI: "Tracciamento della cupola del Brunelleschi. Muratori e geometria", *Critica d'Arte* **XLIX**, s. IV, n. 3 (1984) 38-47.
- [15] P. A. ROSSI: *Le cupole del Brunelleschi. Capire per conservare*. Calderoni, Bologna (1982).



Giuseppe Conti: Giuseppe Conti è professore di Analisi Matematica presso il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica dell'Università di Firenze e di Istituzioni di Matematiche presso il Corso di Laurea in Architettura dell'Università di Firenze.

È autore di numerose pubblicazioni scientifiche di Analisi Funzionale non lineare su diverse riviste internazionali. Da tempo si interessa di applicazioni della matematica all'arte, alla musica, alla natura ed all'architettura. Su questi argomenti ha scritto diversi libri ed articoli su riviste specializzate; inoltre ha tenuto numerose conferenze presso università italiane e straniere ed in varie associazioni culturali. Egli è anche autore di numerosi libri di testo per l'università. Nel 2003 ha ricevuto il prestigioso Pirelli Award per la divulgazione scientifica tramite internet.

